Научная статья
УДК 510.5
DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-79-95

СПЕКТРАЛЬНАЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ОТНОШЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НА УПОРЯДОЧЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Искандер Шагитович Калимуллин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Казань, Россия

ikalimul@gmail.com; https://orid.org/0000-0002-5931-3453

Аннотация

В работе показано, что спектр степеней любой алгебраической структуры равен спектру степеней линейного порядка, обогащенного дополнительным отношением эквивалентности. Использованная при доказательстве техника позволила получить результаты и сформулировать некоторые проблемы, касающиеся других аспектов алгоритмической универсальности классов алгебраических структур с линейным порядком, в том числе связанных с разрешимостью элементарных теорий и их ограниченных фрагментов.

Ключевые слова и фразы

алгебраическая структура, спектр степеней, линейный порядок, отношение эквивалентности.

Источник финансирования

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 24-11-00227.

Для цитирования

Калимуллин И. Ш. Спектральная универсальность отношений эквивалентности на упорядочении рациональных чисел // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 1, С. 79-95. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-79-95

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 79-95
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 79-95

Spectral universality of equivalence relations on the ordering of rational numbers

Iskander Sh. Kalimullin

Kazan Federal University, Kazan, Russia

ikalimul@gmail.com; https://orid.org/0000-0002-5931-3453

Abstract

This paper shows that the degree spectrum of any algebraic structure is equal to the degree spectrum of a linear ordering enriched with an additional equivalence relation. The technique used in the proof allowed us to obtain results and formulate several problems concerning other aspects of the algorithmic universality of classes of algebraic structures with linear ordering, including those related to the decidability of elementary theories and their bounded fragments.

Keywords

algebraic structure, degree spectra, linear ordering, equivalence relation.

Funding

The work is supported by the Russian Science Foundation grant № 24-11-00227.

For citation

Kalimullin I. Sh. Spectral universality of equivalence relations on the ordering of rational numbers // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 1, P. 79-95. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-79-95

§ 1. Введение и постановка задачи

Спектром степеней $\mathbf{DgSp}(\mathcal{A})$ счетной алгебраической структуры $\mathcal{A}$ называется множество тьюринговых степеней $\mathbf{x}$, для которых структура $\mathcal{A}$ имеет $\mathbf{x}$-вычислимую изоморфную копию, носителем которой является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Класс алгебраических структур $\mathbf{C}$ называется *спектрально универсальным*, если для любой счетной алгебраической структуры $\mathcal{A}$ конечной (или вычислимой) сигнатуры существует структура $\mathcal{C} \in \mathbf{C}$ такая, что $\mathbf{DgSp}(\mathcal{A}) = \mathbf{DgSp}(\mathcal{C})$. Изучение вопросов конструктивной универсальности классов алгебраических структур (в том числе, спектральной универсальности) было начато в работе [1]. В частности, была установлена спектральная универсальность следующих естественных классов структур: неориентированных графов, частичных порядков, решеток, целостных колец, коммутативных полугрупп, 2-ступенно нильпотентных групп. Кроме того, в работе [2] была установлена универсальность класса полей.

В тоже самое время некоторые естественные классы структур не являются спектрально универсальными, например, линейные порядки и структуры эквивалентности. Не-универсальность класса линейных порядков следует из работы Л. Дж. Рихтер [3], причем при доказательстве используется важная особенность линейных порядков: разрешимость экзистенциальной теории любого линейного порядка с выделенным в нем конечным числом констант (recursive embeddability condition). Нетрудно заметить, что структуры эквивалентности обладают тем же свойством, поэтому из доказательства Л. Дж. Рихтер следует также и неуниверсальность структур эквивалентности.

В данной работе будет доказано, что если рассматривать отношения линейного порядка и эквивалентности вместе на одном носителе, то мы получим спектрально универсальный класс структур.

Из похожих результатов можно упомянуть спектральную универсальность двух отношений эквивалентности (Е. Б. Фокина [4], Д. А. Тусупов [5], М. И. Марчук [6]), двух унарных функций (О. В. Кудинов, В. Л. Селиванов, см. [7]), булевых алгебр с одноместным предикатом (П. Е. Алаев, см. [7]), контактных и модальных алгебр (Н. А. Баженов [8], [9]), а также спектральную универсальность линейных порядков с бинарным отношением (М. В. Зубков, А. Н. Фролов [10]). Последний результат уточняется следующей теоремой.

§ 2. Доказательство основных результатов

Теорема 1. *Для любой бинарной операции $*$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ существует отношение эквивалентности $\sim$ на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$, такое, что*

$$\mathbf{DgSp}(\mathbb{N}, *) = \mathbf{DgSp}(\mathbb{Q}, <, \sim).$$

Здесь под $<$ понимается стандартное линейное упорядочение рациональных чисел.

Идея доказательства теоремы основана на использовании перемешанных сумм линейных порядков (shuffle sum), применение данной техники при исследовании спектров степеней можно также найти в работах [10], [11] и [12]. Кроме того, используются идеи и методы элементарной интерпретации структур, развитые с целью доказательства наследственной неразрешимости теории класса конечных линейных порядков с эквивалентностью и ее ограниченных фрагментов, в частности, из [13] (предложение 8.6.10), а также из статьи [14], в которой найдена беспараметрическая Σ_1-интерпретация структур в линейных порядках с эквивалентностью.

Доказательство. Открытые и замкнутые интервалы на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду ниже будут обозначаться следующим образом:

$$\mathbb{Q}(a,b) = \{u \in \mathbb{Q} \mid a < u < b\},$$

$$\mathbb{Q}[a,b] = \{u \in \mathbb{Q} \mid a \leq u \leq b\}.$$

Концами интервалов a, b в нашем доказательстве будут являться только рациональные числа.

Вычислимо разобьем множество положительных рациональных чисел на непересекающиеся замкнутые интервалы плотным образом. Другими словами, пусть

$$\mathbb{Q}^{+} = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{Q}[a_q, d_q]$$

для некоторых вычислимых функций $q \mapsto a_q$ и $q \mapsto d_q$ таких, что $a_q < d_q$ для всех $q \in \mathbb{Q}$. Здесь мы используем знак суммы $\sum$, чтобы подчеркнуть, что имеет место упорядоченное сложение в смысле линейных порядков. В частности, для всех $q, q' \in \mathbb{Q}$ имеем

$$q < q' \implies 0 < a_q < d_q < a_{q'} < d_{q'}.$$

Кроме того, разобьем вычислимым образом каждый из интервалов $\mathbb{Q}[a_q, d_q]$, $q \in \mathbb{Q}$, двумя дополнительными рациональными числами:

$$a_q < b_q < c_q < d_q.$$

Каждому отрицательному числу $r \in \mathbb{Q}^{-}$ поставим в соответствие (также плотным образом) один из интервалов $\mathbb{Q}[a_q, d_q]$, $q \in \mathbb{Q}$, то есть зафиксируем вычислимую функцию $s(r)$ такую, что для всех отрицательных рациональных чисел $r' < r'' < 0$ и каждого $q \in \mathbb{Q}$ существует отрицательное рациональное число $r \in \mathbb{Q}^{-}$, для которого выполнено $r' < r < r''$ и $s(r) = q$.

Наконец, закончим подготовительную часть доказательства назначением каждой паре $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ бесконечного множества интервалов $\mathbb{Q}[a_q, d_q]$,, $q \in \mathbb{Q}$. Мы это также можем произвести вычислимо и всюду плотно. Имеется в виду, что мы фиксируем вычислимую функцию $t : q \mapsto (x, y)$ такую, что для всех рациональных чисел $q' < q''$ и каждой пары $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ существует $q \in \mathbb{Q}$, $q' < q < q''$, для которого имеет место $t(q) = (x, y)$.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 79-95
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 79-95

Разобьем теперь множество $\mathbb{Q}$ на классы экививалентности, автоматически определяя при этом соответствующее отношение эквивалентности $\sim$.

- Класс эквивалентности A_z для фиксированного $z \in \mathbb{N}$ есть объединение следующих открытых интервалов:

  1. $\mathbb{Q}(a_q, b_q)$, если $t(q) = (z, y)$ для некоторого $y \in \mathbb{N}$;
  2. $\mathbb{Q}(b_q, c_q)$, если $t(q) = (x, z)$ для некоторого $x \in \mathbb{N}$;
  3. $\mathbb{Q}(c_q, d_q)$, если $t(q) = (x, y)$ и $z = x * y$ для некоторых $x, y \in \mathbb{N}$.

  Заметим, что классы A_z, $z \in \mathbb{N}$, полностью исчерпывают все положительные рациональные числа, не равные числам a_q, b_q, c_q, d_q для $q \in \mathbb{Q}$.

- Класс B_q для фиксированного $q \in \mathbb{Q}$ есть объединение конечного множества $\{a_q, b_q, c_q, d_q\}$ с множеством всех отрицательных чисел r, для которых имеет место $s(r) = q$. Ясно, что таким образом мы исчерпаем все ненулевые рациональные числа.

- Класс $\{0\}$. Единственный класс эквивалентности, состоящий из одного элемента.

Отметим, что в полученной структуре $(\mathbb{Q}, <, \sim)$ множества $A = \bigcup_{z\in\mathbb{N}} A_z$ и $B = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} B_q$ экзистенциально определимы с параметром 0: формула

$$\exists r(r < 0 \,\&\, r \sim u)$$

имеет место тогда и только тогда, когда $u \in B = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} B_q$, а справедливость формулы

$$\exists r, v_1, v_2 \not\sim u(r < 0 < v_1 < u < v_2 \,\&\, r \sim v_1 \sim v_2)$$

эквивалентна $u \in A = \bigcup_{z\in\mathbb{N}} A_z$.

Кроме того, формула

$$\exists u \in A_x \exists v \in A_y \exists w \in A_z \exists a \sim b \sim c \sim d \in B(0 < a < u < b < v < c < w < d)$$

определяет бинарную операцию на A-классах экивалентности $A_x * A_y = A_z$. Ясно, что тогда $A_x * A_y = A_{x*y}$ для всех $x, y \in \mathbb{N}$. Поэтому исходная структура $(\mathbb{N}, *)$ эффективно интерпретируется в любой изоморфной копии построенной структуры $(\mathbb{Q}, <, \sim)$. Тем более, имеем

$$\mathbf{DgSp}(\mathbb{Q}, <, \sim) \subseteq \mathbf{DgSp}(\mathbb{N}, *).$$

Обратное включение

$$\mathbf{DgSp}(\mathbb{N},*) \subseteq \mathbf{DgSp}(\mathbb{Q},<,\sim)$$

будет следовать из конструктивности нашего построения, однако для этого требуется проверить корректность преобразования $(\mathbb{N},*) \mapsto (\mathbb{Q},<,\sim)$ на типах изоморфизма структур.

Предположим, что $(\mathbb{N},*) \cong (\mathbb{N},*')$ посредством изоморфизма f, то есть f — перестановка множества $\mathbb{N}$ такая, что

$$f(x*y) = f(x)*' f(y)$$

для всех $x, y \in \mathbb{N}$.

Установим, что $(\mathbb{Q},<,\sim) \cong (\mathbb{Q},<,\sim')$, где $\sim'$ является отношением эквивалентности, классами эквивалентности которой являются классы $\{0\}$, B_q, $q \in \mathbb{Q}$, и классы A'_z, $z \in \mathbb{N}$, причем каждый класс A'_z есть объединение следующих интервалов:

1. $\mathbb{Q}(a_q, b_q)$, если $t(q) = (z, y)$ для некоторого $y \in \mathbb{N}$;
2. $\mathbb{Q}(b_q, c_q)$, если $t(q) = (x, z)$ для некоторого $x \in \mathbb{N}$;
3. $\mathbb{Q}(c_q, d_q)$, если $t(q) = (x, y)$ и $z = x *' y$ для некоторых $x, y \in \mathbb{N}$.

В силу выбора функции $t(q)$ стандартной челночной техникой мы можем построить возрастающую биекцию $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ такую, что для всех $q \in \mathbb{Q}$ выполнена импликация

$$t(q) = (x, y) \implies t(g(q)) = (f(x), f(y)).$$

(Здесь и далее мы опускаем описание пошагового построения такой биекции. Более подробное описание челночного построения для похожей структуры приведено в работе [10]).

Теперь можем определить кусочно-линейно возрастающую биекцию $h : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ такую, что

$$h(a_q) = a_{g(q)}, h(b_q) = b_{g(q)}, h(c_q) = c_{g(q)} \text{ и } h(d_q) = d_{g(q)}$$

для всех $q \in \mathbb{Q}$. Тогда из равенства $f(x * y) = f(x) *' f(y)$ следует, что для каждого $z \in \mathbb{N}$ функция h будет биективно отображать $\sim$-класс A_z на $\sim'$-класс $A'_{f(z)}$.

Действительно, функция h отображает интервал $\mathbb{Q}(a_q, b_q) \subseteq A_z$, $t(q) = (z, y)$, на интервал $\mathbb{Q}(a_{g(q)}, b_{g(q)}) \subseteq A'_{f(z)}$, так как $t(g(q)) = (f(z), f(y))$. Аналогично, (b, c)-интервалы класса A_z будут отображаться на (b, c)-интервалы класса $A'_{f(z)}$. Наконец, интервалы $\mathbb{Q}(c_q, d_q) \subseteq A_z$, $t(q) = (x, y)$, $z = x * y$, будут отображаться на интервалы $\mathbb{Q}(c_{g(q)}, d_{g(q)}) \subseteq A'_{f(z)}$, так как $t(g(q)) = (f(x), f(y))$ и $f(z) = f(x) *' f(y)$.

Свойства функции $s(r)$ позволяют нам применить челночное построение еще раз, доопределяя h до возрастающей биективной функции на всем $\mathbb{Q}$ так, чтобы $h(0) = 0$ и для каждого отрицательного числа $r \in \mathbb{Q}^-$ имело место $s(h(r)) = g(s(r))$. Заметим, что последнее равенство эквивалентно импликации

$$s(r) = q \implies s(h(r)) = g(q).$$

Тогда для каждого $q \in \mathbb{Q}$ расширенная функция h будет биективно отображать $\sim$-класс B_q на $\sim'$-класс $B_{g(q)}$. Таким образом, имеем

$$u \sim v \iff h(u) \sim' h(v),$$

для всех $u, v \in \mathbb{Q}$, так что h является искомым изоморфизмом $(\mathbb{Q}, <, \sim)$ на $(\mathbb{Q}, <, \sim')$.

Как уже отмечалось выше, конструктивность построения $(\mathbb{Q}, <, \sim)$ позволяет теперь сделать вывод о равенстве спектров степеней структур $(\mathbb{N}, *)$ и $(\mathbb{Q}, <, \sim)$.

□

Из доказанной спектральной универсальности алгебраических структур вида $(\mathbb{Q}, <, \sim)$ немедленно следует, что спектрами степеней таких структур могут быть следующие известные спектры степеней (приведенный список далеко не полный).

Следствие 2. *1. Для каждой тьюринговой степени* $\mathbf{a}$ *существует отношение эквивалентности* $\sim$ *на* $\mathbb{Q}$ *такое, что*

$$\mathbf{DgSp}(\mathbb{Q}, <, \sim) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{a}\}.$$

2. Если тьюрингова степень $\mathbf{b}$ *перечислима,* $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ *и* $\mathbf{a}' = \mathbf{b}'$, *то*

$$\mathbf{DgSp}(\mathbb{Q}, <, \sim) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}\}$$

для некоторого отношения эквивалентности $\sim$ *на* $\mathbb{Q}$. *Здесь через* $\mathbf{a}'$ *и* $\mathbf{b}'$ *обозначаются тьюринговы скачки степеней* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$.

3. Для произвольного конструктивного ординала α *существует отношение эквивалентности* $\sim$ *на* $\mathbb{Q}$ *такое, что*

$$\mathbf{DgSp}(\mathbb{Q}, <, \sim) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^{(\alpha+1)} \geq \mathbf{0}^{(\alpha+2)}\}.$$

Здесь под $\mathbf{x}^{(\beta)}$ *понимается* β*-я итерация тьюрингового скачка.*

4. *Для произвольного конструктивного ординала α существует отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathbb{Q}$ такое, что*

$$\mathbf{DgSp}(\mathbb{Q}, <, \sim) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^{(\alpha+1)} > \mathbf{0}^{(\alpha+1)}\}.$$

5. *Для некоторого отношения эквивалентности $\sim$ на $\mathbb{Q}$ спектр степеней структуры $(\mathbb{Q}, <, \sim)$ может состоять в точности из гиперимунных степеней.*

6. *Для некоторого отношения эквивалентности $\sim$ на $\mathbb{Q}$ спектр степеней структуры $(\mathbb{Q}, <, \sim)$ может состоять в точности из не-гиперарифметических степеней.*

Доказательство. (1). Существование спектра степеней вида $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{a}\}$ следует из [3].

(2). Случай $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ следует из [15] или [16]. Чуть более общий случай $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ следует из [17]. Случай $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ следует из [18]. Существование указанного спектра степеней в общем случае следует из [19]. Там же устанавливается, что спектра степеней алгебраической структуры $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}\}$ при $\mathbf{a} = \mathbf{0}''$ не существует. При этом вопрос Р. Доуни [20] о существовании линейного порядка с указанным спектром степеней открыт даже для случая $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

(3) и (4). Следует из [21]. При этом для случая $\alpha \geq 1$ в силу результатов из [11] при замене стандартного порядка $<$ на неплотный линейный порядок можно обойтись без отношения эквивалентности (или, например, считать отношение эквивалентности тривиальным: $x \sim y \iff x = y$). Для случая $\alpha = 0$ спектр степеней из (3) не реализуем одним отношением линейного порядка [22]. Открытый вопрос о существовании линейного порядка со спектром степеней из (4) при $\alpha = 0$ поставлен в [7].

(5). Следует из [23].

(6). Следует из [24]. Так как указанный спектр степеней близок спектру из (4), можно, отказавшись от стандартного линейного порядка на $\mathbb{Q}$, считать отношение эквивалентности тривиальным.

$\square$

Из доказательства теоремы легко следует также, что указанные классы тьюринговых степеней реализуются также и как *спектры отношения* эквивалентности $\mathbf{DgSp}_{(\mathbb{Q},<)}(\sim)$ относительно различных конструктивизаций плотного линейного порядка $(\mathbb{Q}, <)$ [25].

Как и в преобразованиях между различными классами структур из [1] построенное в доказательстве теоремы преобразование $(\mathbb{N}, *) \mapsto (\mathbb{Q}, <, \sim)$

сохраняет не только спектры степеней, но и некоторые другие алгоритмические свойства структуры. Например, оно сохраняет *алгоритмическую размерность*, то есть число вычислимо не изоморфных между собой конструктвизаций структуры. Из работы [26] следует, что для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ существует алгебраическая структура алгоритмической размерности n.

Следствие 3. *Для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ существует отношение эквивалентности $\sim$ такое, что структура $(\mathbb{Q}, <, \sim)$ имеет алгоритмическую размерность n.*

Доказательство. Для каждого $x \in \mathbb{N}$ пусть

$$\alpha_x = \frac{a_q + b_q}{2},$$

где q — подходящее рациональное число такое, что $t(q) = (x, y)$ для некоторого $y \in \mathbb{N}$. Ясно, что тогда $\alpha_x \in A_x$ вне зависимости от заданной бинарной операции $*$.

Из доказательства теоремы следует, что исходная операция $*$ однозначно восстанавливается из $(\mathbb{Q}, <, \sim)$ посредством экзистенциального условия

$$\exists u \sim \alpha_x \exists v \sim \alpha_y \exists w \sim \alpha_{x*y} \exists a \sim b \sim c \sim d \in B (0 < a < u < b < v < c < w < d).$$

Поэтому, если между вычислимыми структурами алгоритмической размерности n

$$(\mathbb{N}, *') \cong (\mathbb{N}, *'') \cong \cdots \cong (\mathbb{N}, *^{(n)})$$

не имеется вычислимого изоморфизма, то между соответствующими структурами

$$(\mathbb{Q}, <, \sim') \cong (\mathbb{Q}, <, \sim'') \cong \cdots \cong (\mathbb{Q}, <, \sim^{(n)})$$

вычислимого изоморфизма существовать также не может. Действительно, иначе любой вычислимый изоморфизм

$$\iota : (\mathbb{Q}, <, \sim^{(i)}) \longrightarrow (\mathbb{Q}, <, \sim^{(j)})$$

при $1 \leq i < j \leq n$ индуцировал бы вычислимый изоморфизм

$$\kappa : (\mathbb{N}, *^{(i)}) \longrightarrow (\mathbb{N}, *^{(j)}),$$

определенный по правилу $\alpha_{\kappa(x)} \sim^{(j)} \iota(\alpha_x)$.

Предположим теперь, что $(M, <^M, \sim^M)$ — произвольная вычислимая структура, изоморфная $(\mathbb{Q}, <, \sim')$. Докажем, что для некоторого i, $1 \leq i \leq n$, существует вычислимый изоморфизм между $(\mathbb{Q}, <, \sim^{(i)})$ и $(M, <^M, \sim^M)$.

Для этого зафиксируем единственный одноэлементный класс $\sim^M$-эквивалентности $\{0^M\} \subseteq M$; перечислимое множество $A^M \subseteq M$, состоящее из всех элементов $u \in M$, для которых выполнено

$$\exists r, v_1, v_2 \not\sim^M u(r <^M 0^M <^M v_1 <^M u <^M v_2 \,\&\, r \sim^M v_1 \sim^M v_2);$$

а также перечислимое множество $B^M \subseteq M$, состоящее из элементов $u \in M$, для которых имеет место

$$\exists r(r <^M 0^M \,\&\, r \sim^M u).$$

Кроме того, мы можем конструктивно выбрать последовательность попарно не $\sim^M$-эквивалентных элементов множества A^M

$$\alpha_0^M, \alpha_1^M, \alpha_2^M, \ldots$$

так, чтобы для любого $u \in A^M$ существовал $x \in \mathbb{N}$ такой, что $u \sim^M \alpha_x^M$. Теперь мы можем определить вычислимую бинарную операцию $*$ на $\mathbb{N}$ по следующему правилу: $x * y = z$ если, и только если, имеет место

$$0^M <^M a <^M u <^M b <^M v <^M c <^M w <^M d$$

для некоторых $u \sim^M \alpha_x^M$, $v \sim^M \alpha_y^M$, $w \sim^M \alpha_z^M$ и $a, b, c, d \in B^M$ таких что

$$a \sim^M b \sim^M c \sim^M d.$$

Так как n — алгоритмическая размерность исходной структуры и $(\mathbb{N}, *) \cong (\mathbb{N}, *')$, имеем вычислимый изоморфизм между $(\mathbb{N}, *)$ и $(\mathbb{N}, *^{(i)})$ для некоторого i, $1 \leq i \leq n$. В силу конструктивности доказательства теоремы должен тогда существовать вычислимый изоморфизм между $(\mathbb{Q}, <, \sim^{(i)})$ и структурой $(\mathbb{Q}, <, \sim^*)$, построенной по операции $*$.

Остается построить вычислимый изоморфизм между $(\mathbb{Q}, <, \sim^*)$ и $(M, <^M, \sim^M)$. Тогда композиция двух найденных изоморфизмов даст искомый вычислимый изоморфизм между $(\mathbb{Q}, <, \sim^{(i)})$ и $(M, <^M, \sim^M)$.

Так как $(M, <^M, \sim^M) \cong (\mathbb{Q}, <, \sim')$, перечислимое множество B^M вычислимым образом разбивается на классы $\sim^M$-эквивалентности B_i^M, $i \in I$, причем каждый B_i^M содержит в точности четыре элемента

$$a_i^M <^M b_i^M <^M c_i^M <^M d_i^M$$

таких, что $0^M <^M a_i^M$. При этом здесь возникает плотный порядок на индексах: $i <^I j \iff d_i^M <^M a_j^M$.

Далее, вычислимая функция $t^M(i) = (x, y)$, где $i \in I$ и $x, y \in \mathbb{N}$, может быть определена из выполнения условия

$$a_i^M <^M u <^M b_i^M <^M v <^M c_i^M$$

для некоторых $u \sim^M \alpha_x^M$ и $v \sim^M \alpha_y^M$. Тогда челночное построение приводит к вычислимому изоморфизму линейных порядков

$$g : (\mathbb{Q}, <) \longrightarrow (I, <^I),$$

такому, что $t^M(g(q)) = t(q)$ для всех $q \in \mathbb{Q}$. Полагая

$$h(a_q) = a^M_{g(q)}, h(b_q) = b^M_{g(q)}, h(c_q) = c^M_{g(q)} \text{ и } h(d_q) = d^M_{g(q)},$$

доопределим h до вычислимого изомофизма структур

$$h : (\mathbb{Q}^+, <, \sim^*) \longrightarrow (M^+, <^M, \sim^M),$$

где $M^+ = \{m \in M \mid 0^M <^M m\}$.

Из $(M, <^M, \sim^M) \cong (\mathbb{Q}, <, \sim')$ следует существование вычислимой функции s^M, которая каждому $m <^M 0^M$ ставит в соответствие значение $s^M(m) = i \in I$ такое, что $m \sim^M a_i^M$. Расширим теперь вычислимую функцию h до изоморфизма линейного порядка $(\mathbb{Q}, <)$ на $(M, <^M)$ такого, что для всех $r < 0$ имеет место $s^M(h(r)) = g(s(r))$. Получившаяся функция h будет вычислимым изоморфизмом между структурами $(\mathbb{Q}, <, \sim^*)$ и $(M, <^M, \sim^M)$.

□

Заметим, что аналогичные предыдущему доказательству рассуждения приводят к выводу о том, что рассматриваемое преобразование $(\mathbb{N}, *) \mapsto (\mathbb{Q}, <, \sim)$ сохраняет также *спектры вычислимой категоричности* [27] и *спектральную размерность* [28]. В тоже время известных теоретических оснований для того, чтобы говорить о полной алгоритмической универсальности класса линейных порядков с отношением эквивалентности хотя бы в контексте работы [1], недостаточно.

Недавно В. Е. Карпов и С. О. Сперанский [14] построили довольно схожую с теоремой 1 интерпретацию конечных алгебраических структур в классе конечных линейных порядков с эквивалентностью для доказательства наследственной неразрешимости $\exists\forall$-теории этого класса. Данная интерпретация может быть распространена и в плотные линейные порядки с эквивалентностью, образующую конечное число фактор-классов, посредством добавления еще одного бесконечного фактор-класса. При этом, однако, в задающих интерпретацию экзистенциальных формулах необходимо будет использовать параметр, отмечающий данный фактор-класс. Доказательство теоремы 1 также может быть использовано для подобного рода интерпретации конечных структур. Для этого необходимо всего лишь ограничиться конечным числом интервалов $\mathbb{Q}[a_q, d_q]$, по одному для каждой пары $(x, y) = t(q)$. Положительные рациональные числа, не входящие в указанные интервалы, будут образовывать новый фактор-класс C, наличие которого не портит интерпретацию указанными в доказательстве теоремы формулами. Отметим, что и здесь необходимо использовать дополнительный параметр 0. Поэтому оба способа рассуждений приводят к наследственной неразрешимости лишь $\forall\exists\forall$-теории плотных порядков, разбитых на конечное число фактор-классов, а ответ на естественный вопрос о разрешимости $\exists\forall$-теории автору неизвестен. При этом если условие конечного числа фактор-классов снять, то наследственная неразрешимость $\exists\forall$-теории непосредственно следует из [14], поскольку построенный в указанной работе конечный линейный порядок с эквивалентностью можно "уплотнить" бесконечным числом одноэлементных классов.

Следствие 4. $\forall\exists\forall$-*Теория класса плотных линейных порядков с эквивалентностью, разбивающей носитель на конечное число фактор-классов, наследственно неразрешима.*

Заметим также, что из результата Ю. Ш. Гуревича [29] следует разрешимость теории линейных порядков, разбитых на заранее фиксированное конечное число классов эквивалентности. Поэтому теория, неразрешимость которой утверждается в следствии, является ко-перечислимой.

Список литературы

1. *Hirschfeldt D. R., Khoussainov B., Shore R. A., Slinko A. M.* Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures // *Ann. Pure Appl. Logic.* 2002. V. 115. P. 71–113.

2. *Miller R., Poonen B., Schoutens H., Shlapentokh A.* A computable functor from graphs to fields // *J. Symbolic Logic.* 2018. V. 83, № 1. P. 326–348.

3. *Richter L. J.* Degrees of structures // *J. Symb. Logic.* 1981. V. 46, № 4. P. 723–731.

4. *Фокина Е. Б.* Алгоритмические свойства моделей сигнатуры с двумя одноместными функциональными символами // *Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика.* 2008. Т. 8, № 1. С. 90–101.

5. *Тусупов Д. А.* Изоморфизмы и алгоритмические свойства структур с двумя эквивалентностями // *Алгебра и логика.* 2016. Т. 55, № 1. С. 75–86.

6. *Марчук М. И.* Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций структур с двумя отношениями эквивалентности // *Алгебра и логика.* 2016. Т. 55, № 4. С. 465–477.

7. *Калимуллин И. Ш., Селиванов В. Л., Фролов А. Н.* Спектры степеней структур // *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения Тематические обзоры.* М.: ВИНИТИ РАН. 2018. Т. 158. С. 23–39.

8. *Bazhenov N.* Computable contact algebras // *Fundam. Inform.* 2019. V. 167, № 4. P. 257–269.

9. *Bazhenov N.* HKSS-completeness of modal algebras // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2021. V. 18, № 2. P. 923–930.

10. *Зубков М. В., Фролов А. Н.* Спектральная универсальность линейных порядков с одним бинарным отношением // *Сиб. матем. журн.* 2020. Т. 61, № 3. С. 587–593.

11. *Frolov A., Kalimullin I., Harizanov V., Kudinov O., Miller R.* Spectra of high-n and non-low-n degrees // *J. of Logic and Computation.* 2012. V. 22, № 4. P. 755–777.

12. *Баженов Н. А., Фролов А. Н., Калимуллин И. Ш., Мельников А. Г.* Вычислимость дистрибутивных решеток // *Сиб. мат. журн.* 2017. Т. 58, № 6. С. 1236–1251.

13. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика.* М: Физматлит, 2011.

14. *Карпов В. Е., Сперанский С. О.* О наследственно неразрешимых фрагментах базовых элементарных теорий // *Мат. заметки.* 2025. Т. 118, № 1. С. 77–90.

15. *Slaman T.* Relative to any nonrecursive set // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1998. V. 126, № 7. P. 2117–2122.

16. *Wehner S.* Enumerations, countable structures, and Turing degrees // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1998. V. 126, № 7. P. 2131–2139.

17. *Калимуллин И. Ш.* Спектры степеней некоторых алгебраических структур // *Алгебра и логика.* 2007. Т. 46, № 6. С. 729–744.

18. *Калимуллин И. Ш.* Почти вычислимо перечислимые семейства множеств // *Математический сборник.* 2008. Т. 199, № 10. С. 33–40.

19. *Andrews U., Cai M., Kalimullin I. S., Lempp S., Miller J. S., Montalban A.* The complements of lower cones of degrees and the degree spectra of structures // *J. of Symbolic Logic.* 2016. V. 81, № 3. P. 997–1006.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 79-95
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 79-95

20. *Downey R. G.* Computability theory and linear orderings // In: Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B. (eds.). Handbook of Recursive Mathematics. Vol. 2 / Stud. Logic Found. Math. 1998. Amsterdam: Elsevier. V. 139. P. 823–976.

21. *Goncharov S. S., Harizanov V. S., Knight J. F., McCoy C., Miller R. G., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory // *Annals Pure Appl. Logic.* 2005. V. 136, № 3. P. 219–246.

22. *Knight J. F.* Degrees coded in jumps of orderings // *J. Symb. Logic.* 1986. V. 51, № 4. P. 1034–1042.

23. *Csima B. F., Kalimullin I. S.* Degree spectra and immunity properties // *Math. Logic Quarterly.* 2010. V. 56. P. 67–77.

24. *Greenberg N., Montalban A., Slaman T. A.* Relative to any non-hyperarithmetic set // *J. Math. Logic.* – 2013. V. 13, № 1. 1250007.

25. *Harizanov V. S., Miller R. G.* Spectra of structures and relations // *J. Symbolic Logic.* 2007. V. 72, № 1. P. 324–348.

26. *Гончаров С. С.* Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций // *Алгебра и логика.* 1980. V. 19, № 6. P. 621–639.

27. *Fokina E. B., Kalimullin I., Miller R.* Degrees of categoricity of computable structures // *Arch. Math. Logic.* 2010. V. 49. P. 51–67.

28. *Bazhenov N. A., Kalimullin I. Sh., Yamaleev M. M.* Degrees of categoricity and spectral dimension // *J. Symbolic Logic.* 2018. V. 83, № 1. P. 103–116.

29. *Гуревич Ю. Ш.* Элементарные свойства упорядоченных абелевых групп // *Алгебра и логика. Семинар.* 1964. Т. 3, № 1. С. 5–39.

References

1. *Hirschfeldt D. R., Khoussainov B., Shore R. A., Slinko A. M.* Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures // *Ann. Pure Appl. Logic.* 2002. V. 115. P. 71–113.

2. *Miller R., Poonen B., Schoutens H., Shlapentokh A.* A computable functor from graphs to fields // *J. Symbolic Logic.* 2018. V. 83, № 1. P. 326–348.

3. *Richter L. J.* Degrees of structures // *J. Symb. Logic.* 1981. V. 46, № 4. P. 723–731.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 79-95
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 79-95

4. *Fokina E. B.* Algorithmic Properties of Structures for Languages with Two Unary Functional Symbols // *Vestnik NGU: Mathematics, mechanics, informatics.* 2008. V. 8, № 1. P. 90–101. (in Russian).

5. *Tusupov D. A.* Isomorphisms and algorithmic properties of structures with two equivalences // *Algebra and Logic.* 2016. V. 55, № 1. P. 50–57.

6. *Marchuk M. I.* Index set of structures with two equivalence relations that are autostable relative to strong constructivizations // *Algebra and Logic.* 2016. V. 55, № 4. P. 306–314.

7. *Kalimullin I. Sh., Selivanov V. L., Frolov A. N.* Degree spectra of structures // *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. V. 256. P. 143–159.

8. *Bazhenov N.* Computable contact algebras // *Fundam. Inform.* 2019. V. 167, № 4. P. 257–269.

9. *Bazhenov N.* HKSS-completeness of modal algebras // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2021. V. 18, № 2. P. 923–930.

10. *Zubkov M. V., Frolov A. N.* Spectral universality of linear orders with one binary relation // *Siberian Math. Journal.* 2020. V. 61, № 3. P. 463–467.

11. *Frolov A., Kalimullin I., Harizanov V., Kudinov O., Miller R.* Spectra of high-n and non-low-n degrees // *J. of Logic and Computation.* 2012. V. 22, № 4. P. 755–777.

12. *Bazhenov N. A., Frolov A. N., Kalimullin I. Sh., Melnikov A. G.* Computability of distributive lattices // *Siberian Math. Journal.* 2017. V. 58, № 6. P. 1236–1251.

13. *Ershov Yu. L., Palyutin E. A. Mathematical Logic,* M: Fizmatlit, 2011.

14. *Karpov V. E., Speranski S. O.* On hereditarily undecidable fragments of basic elementary theories // *Mat. Zametki.* 2025. V. 118, № 1. P. 77–90.

15. *Slaman T.* Relative to any nonrecursive set // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1998. V. 126, № 7. P. 2117–2122.

16. *Wehner S.* Enumerations, countable structures, and Turing degrees // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1998. V. 126, № 7. P. 2131–2139.

17. *Kalimullin I. Sh.* Spectra of degrees of some structures // *Algebra and Logic.* 2007. V. 46, № 6. P. 399–408.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 79-95
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 79-95

18. *Kalimullin I. Sh.* Almost computably enumerable families of sets // *Sbornik: Mathematics.* 2008. V. 199, № 10. P. 1451–1458.

19. *Andrews U., Cai M., Kalimullin I. S., Lempp S., Miller J. S., Montalban A.* The complements of lower cones of degrees and the degree spectra of structures // *J. of Symbolic Logic.* 2016. V. 81, № 3. P. 997–1006.

20. *Downey R. G.* Computability theory and linear orderings // In: Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B. (eds.). Handbook of Recursive Mathematics. Vol. 2 / Stud. Logic Found. Math. 1998. Amsterdam: Elsevier. V. 139. P. 823–976.

21. *Goncharov S. S., Harizanov V. S., Knight J. F., McCoy C., Miller R. G., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory // *Annals Pure Appl. Logic.* 2005. V. 136, № 3. P. 219–246.

22. *Knight J. F.* Degrees coded in jumps of orderings // *J. Symb. Logic.* 1986. V. 51, № 4. P. 1034–1042.

23. *Csima B. F., Kalimullin I. S.* Degree spectra and immunity properties // *Math. Logic Quarterly.* 2010. V. 56. P. 67–77.

24. *Greenberg N., Montalban A., Slaman T. A.* Relative to any non-hyperarithmetic set // *J. Math. Logic.* – 2013. V. 13, № 1. 1250007.

25. *Harizanov V. S., Miller R. G.* Spectra of structures and relations // *J. Symbolic Logic.* 2007. V. 72, № 1. P. 324–348.

26. *Goncharov S. S.* Problem of the number of non-self-equivalent constructivizations // *Algebra and Logic.* 1980. V. 19, № 6. P. 401–414.

27. *Fokina E. B., Kalimullin I., Miller R.* Degrees of categoricity of computable structures // *Arch. Math. Logic.* 2010. V. 49. P. 51–67.

28. *Bazhenov N. A., Kalimullin I. Sh., Yamaleev M. M.* Degrees of categoricity and spectral dimension // *J. Symbolic Logic.* 2018. V. 83, № 1. P. 103–116.

29. *Gurevich Yu. Sh.* Elementary properties of ordered Abelian groups // *Algebra i Logika. Sem.* 1964. V. 3, № 1. P. 5–39.

Информация об авторе

Искандер Шагитович Калимуллин, доктор физико-математических наук, профессор

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 79-95
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 79-95

SPIN 4009-8121 AuthorID: 14347
Scopus Author ID 55890726900

Author Information

Iskander Sh. Kalimullin, Doctor of Mathematics, Professor
SPIN 4009-8121 AuthorID: 14347
Scopus Author ID 55890726900

Статья поступила в редакцию 05.08.2025;
одобрена после рецензирования 11.09.2025; принята к публикации 21.01.2026

The article was submitted 05.08.2025;
approved after reviewing 11.09.2025; accepted for publication 21.01.2026